

С. А. Некрасов, В. С. Волков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ПРОБЛЕМЕ СТЕФАНА И МЕТОДЫ ЕГО ВЫЧИСЛЕНИЯ

Южно-Российский государственный политехнический университет,
Российская Федерация, 346428, Новочеркасск, ул. Просвещения, 132

В статье рассмотрены математическая модель и численный метод для расчета и оптимизации температурных полей с учетом фазовых превращений. Приводятся соответствующие примеры расчетов и проведен анализ результатов. Сформулирована задача оптимального управления температурным полем с учетом фазовых переходов и нелинейных свойств материала. Разработаны конечно-разностный метод и программы для ЭВМ, позволяющие эффективно осуществлять компьютерное моделирование и оптимизацию теплофизических процессов при плавлении и кристаллизации вещества. Прямая задача Стефана решалась на основе одного из вариантов сквозного «энтальпийного» метода. Решение сопряженной задачи находилось при помощи сглаживания сосредоточенной теплоемкости и прочих параметров и характеристик с особенностью типа дельта-функции. В качестве примеров описаны две задачи оптимизации: по критерию минимума энергозатрат на плавление материала при соответствующих ограничениях, а также по критерию максимума (минимума) температурного поля в заданной точке области. В обоих случаях функцией управления являлась удельная мощность объемного источника, значения которой находятся в некоторой полосе произвольной ширины. Результаты работы могут применяться при исследовании и проектировании в области металлургии, электрических аппаратов, криотехнике и т. д. Библиогр. 12 назв. Ил. 7. Табл. 3.

Ключевые слова: задача Стефана, оптимальное управление, температурное поле, фазовые переходы, энтальпийный метод, сглаживание.

S. A. Nekrasov, V. S. Volkov

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL FOR STEFAN PROBLEMS

South-Russian State Politechnical University, 132, ul. Prosveschenia,
Novocherkassk, 346428, Russian Federation

The article describes the mathematical model and a numerical method for the calculation and optimization of temperature fields with regard to phase transformations and the nonlinear material properties. It proposes a finite-difference method and a computer program that will effectively implement the computer simulation and optimization of thermal processes during melting and crystallization of the product. Direct Stefan problem was solved on the basis of one of the options through “enthalpic” method. The solution of the dual problem is found by smoothing the concentrated heat capacity and other parameters and characteristics of a feature such as a delta function. The article deals with a number of examples of optimization problems under various restrictions: minimizing energy consumption for melting the material, finding the maximum (minimum) temperature field, as well as two-sided estimate gradient of the solution at a given point in the area. In the above case, the functions of control are the source of the bulk power density, the values of which are located in a strip of arbitrary width. The results can

Некрасов Сергей Александрович — доктор технических наук, профессор; nekrasoff_novoch@mail.ru

Волков Владимир Сергеевич — преподаватель; npi_pm@mail.ru

Nekrasov Sergej Aleksandrovich — doctor of technical sciences, professor; nekrasoff_novoch@mail.ru
Volkov Vladimir Sergeevich — teacher; npi_pm@mail.ru

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2016

be used in the practice of research and design in the field of metallurgy, electrical appliances, cryogenic etc. Refs 12. Figs 7. Tables 3.

Keywords: Stefan problem, optimal control, temperature field, phase transitions, enthalpy method, smoothing.

Введение. Задачи, связанные с вычислением оптимального управления температурными полями с фазовыми переходами, являются относительно новыми и пока мало изученными [1–4]. К ним относятся оптимизация получения отливок в металлургии, технологии сварки, оттаивания мерзлых грунтов и т. д. Существует несколько общих подходов к решению рассматриваемой проблемы, а именно: 1) прямой метод оптимизации; 2) использование методов теории вариационного исчисления и оптимального управления: метод множителей Лагранжа, метод прямых в сочетании с принципом максимума Понтрягина, при помощи которых строятся уравнения экстремалей для оптимального решения. Методика нахождения сопряженной системы уравнений при оптимизации распределенных систем методом множителей Лагранжа описана в [1, 2].

В работе [2] решается одномерная задача оптимального управления плавлением и кристаллизацией вещества при ряде ограничений-неравенств. Функцией управления является интенсивность тепловыделения. Полная вариационная задача разбивается на две поочередных подзадачи: оптимизации плавления и кристаллизации вещества. Аналитическое исследование основано на методе Лагранжа: найдена вариация функционала, сформулирована сопряженная задача для множителей Лагранжа. Численное решение вариационной задачи осуществляется прямым методом на основе энтальпийного подхода и градиентного метода. Описанный подход для трехмерных задач развит в [3].

В [4] получено оптимальное управление для квазистационарной задачи Стефана, когда граница фазового перехода движется вдоль образующей, не меняясь, с постоянной скоростью. Функцией управления является тепловой поток, критерий оптимизации — минимальное отклонение границы фазового перехода от заданной. Аппроксимирующие задачи решаются двойственным регуляризованным методом. Для решения сопряженной задачи применяется метод Галеркина.

В [5] приведено решение обратных задач теории сварки совместно с оптимизацией по нескольким параметрам.

В [6] описано управление температурным полем при таянии и замерзании грунтов на основе известного энтальпийного метода расчета.

В данной статье для трех задач оптимизации температурного поля применяется метод множителей Лагранжа с использованием дельта-функций и их различных аппроксимаций.

1. Математическая модель температурного поля. Рассматриваемый теплофизический процесс описывается многофазной задачей Стефана в «энтальпийном» виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \Delta \Lambda + f(x, t), \quad x \in V, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T = T_S, \quad x \in S, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$T = T_0(x), \quad t = 0; \quad |T| < \infty, \quad x \in V, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$H(T) = \int_{T_0}^T \rho(u) c(u) du + r_f \rho (T_f - 0) \theta (T - T_f),$$

где H — энтальпия; T — температура; $\theta(u)$ — единичная функция Хевисайда; T_f — температура фазового перехода; r_f — скрытая теплота фазового перехода; T_0 — начальное распределение температуры в области ($T_0 < T_f$); $\rho = \rho(T)$ — массовая плотность; $c = c(T)$ — теплоемкость; Λ — тепловой потенциал: $\Lambda(T) = \int_{T_0}^T \lambda(u) du$; $\lambda(T)$ — коэффициент теплопроводности; t — время; $x = (x_1, x_2, x_3)$ — пространственные переменные; Δ — дифференциальный оператор Лапласа по пространственным переменным; f — удельная мощность объемного источника нагрева.

2. Оптимизация на основе метода Лагранжа.

2.1. Задача с интегральным критерием. Критерий оптимизации — минимум затрат энергии на нагрев объемным источником:

$$J = \int_0^{t_F} \int_V f(x, t) dx dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

Ограничениями являются уравнения задачи Стефана (1)–(3) и ограничения на величину плотности тепловыделения:

$$|f(x, t) - f_0(x, t)| \leq \varepsilon_f(x, t), \quad x \in V, \quad 0 < t < t_F; \quad f(x, t) \geq 0, \quad (5)$$

в которых $f_0(x, t)$ и $\varepsilon_f(x, t)$ — ограниченные кусочно-непрерывные функции. Также требуется, чтобы в конечный момент времени температура в заданной точке $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})$ области V была равна температуре фазового перехода:

$$T(x_0, t_F) = T_f. \quad (6)$$

Представим функционал Лагранжа следующим образом:

$$L = J + \int_0^{t_F} \int_V w(x, t) \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta \Lambda - f(x, t) \right) dx dt + w_1 (T(x_0, t_F) - T_f),$$

где $w(x, t)$ — функциональный, а w_1 — скалярный множители Лагранжа.

Согласно известной методике вычислим вариацию и найдем уравнение экстремали данного функционала по функции $T(x, t)$. Запишем функционал Лагранжа в виде, более удобном для формулировки сопряженной задачи:

$$L = \int_0^{t_F} \int_V [w(x, t) \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta \Lambda - f(x, t) \right) + w_1 (T(x, t) - T_f) \delta(x - x_0, t - t_F) + f(x, t)] dx dt.$$

Первая вариация функционала по температуре

$$\delta_T(L) = \int_0^{t_F} \int_V [w(x, t) \left(\delta_T \left(\frac{\partial H}{\partial t} \right) - \delta_T(\Delta \Lambda) \right) + w_1 \delta T(x, t) \delta(x - x_0, t - t_F)] dx dt.$$

Представим ее как сумму трех слагаемых:

$$\delta_T(L) = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int_0^{t_F} \int_V w(x, t) \frac{\partial \delta_T(H)}{\partial t} dx dt,$$

$$I_2 = \int_0^{t_F} \int_V -w(x, t) \Delta \delta_T(\Lambda) dx dt,$$

$$I_3 = \int_0^{t_F} \int_V w_1 \delta T(x, t) \delta(x - x_0, t - t_F) dx dt.$$

С учетом формулы для производной произведения функций получаем

$$I_1 = \int_0^{t_F} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (w(x, t) \delta_T(H)) - \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \delta_T(H) \right] dx dt,$$

откуда

$$I_1 = \int_V [w(x, t_F) \delta_T(H(x, t_F)) - w(x, 0) \delta_T(H(x, 0))] dx - \\ - \int_0^{t_F} \int_V \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \delta_T(H) dx dt.$$

Так как $w(x, t_F) = 0$, $\delta T(x, 0) = 0$ и $\delta_T(H(x, 0)) = 0$, $x \in V$, то

$$I_1 = - \int_0^{t_F} \int_V \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \delta_T(H) dx dt,$$

$$\delta_T(H(T)) = \rho(T)c(T)\delta T + r_f \rho(T_f - 0) d\theta / dT (T - T_f) \delta T.$$

Отсюда $\delta_T(H(T)) = \rho(T)c(T)\delta T + r_f \rho(T_f - 0) d\theta / dT (T - T_f) \delta T$, $\delta_T(H(T)) = \rho(T)c_{\text{eff}}(T)\delta T$, где $c_{\text{eff}}(T)$ — «эффективная» теплоемкость, учитывающая скрытую теплоту плавления. Второе слагаемое с учетом свойств дивергенции и градиента преобразуется к виду

$$I_2 = \int_0^{t_F} \int_V [-\text{div}(w(x, t) \text{grad} \delta_T(\Lambda)) + \text{grad} w(x, t) \text{grad} \delta_T(\Lambda)] dx dt \Rightarrow$$

в силу теоремы Остроградского–Гаусса:

$$I_2 = - \int_0^{t_F} \oint_S w(x, t) \frac{\partial \delta_T(\Lambda)}{\partial n_S} dS dt + \int_0^{t_F} \int_V \text{grad} w(x, t) \text{grad} \delta_T(\Lambda) dx dt,$$

где $\frac{\partial}{\partial n_S}$ — производная по нормали \vec{n}_S , внешней к области V .

Предположив, что $w(x, t) = 0$, $x \in S$, $t > 0$, с учетом свойств дивергенции, градиента и формулы Остроградского–Гаусса имеем

$$I_2 = \int_0^{t_F} \int_V [\operatorname{div}(\delta_T(\Lambda) \operatorname{grad} w(x, t)) - \delta_T(\Lambda) \Delta w(x, t)] dx dt \Rightarrow$$

$$I_2 = \int_0^{t_F} \oint_S \delta_T(\Lambda) \frac{\partial w(x, t)}{\partial n_S} dS dt - \int_0^{t_F} \int_V \delta_T(\Lambda) \Delta w(x, t) dx dt \Rightarrow$$

в силу (2): $\delta T = 0$, $\delta_T(\Lambda) = 0$, $x \in S$, $t > 0$, откуда

$$I_2 = - \int_0^{t_F} \int_V \delta_T(\Lambda) \Delta w(x, t) dx dt.$$

Суммируя полученные результаты для вариаций трех слагаемых, находим искомую вариацию функционала Лагранжа

$$\delta T(L) = \int_0^{t_F} \int_V \left[-\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \rho(T) c_{\text{eff}}(T) - \right. \\ \left. - \lambda(T) \Delta w(x, t) + w_1 \delta(x - x_0, t - t_F) \right] \delta T dx dt.$$

Для получения уравнения экстремалей потребуем равенства нулю вариации функционала. С учетом произвола в выборе вариации δT из равенства $\delta T(L) = 0$ следует уравнение

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \rho(T) c_{\text{eff}}(T) + \lambda(T) \Delta w(x, t) - w_1 \delta(x - x_0, t - t_F) = 0, \quad (7)$$

$$x \in V, \quad t > 0.$$

Уравнение (7) вместе с нулевыми краевым и финальным равенствами

$$w(x, t) = 0, \quad x \in S, \quad t > 0; \quad (8)$$

$$w(x, t_F) = 0, \quad x \in V, \quad (9)$$

представляет собой краевую задачу, сопряженную к (1)–(3).

Формула оптимального управления находится из условия $L \rightarrow \min$ для всех $f(x, t)$ из допустимого множества (5). Тогда $f(x, t)(1 - w(x, t)) \rightarrow \min_f$, откуда следует искомое соотношение для предполагаемого оптимального управления

$$f_-(x, t) = f_0(x, t) + \varepsilon_f(x, t) \operatorname{sign}(w(x, t) - 1). \quad (10)$$

Значение параметра w_1 находится в соответствии с условием (6).

Система уравнений (1)–(10) представляет собой краевую задачу метода множителей Лагранжа для рассматриваемой задачи оптимального управления. Ее решение дает искомые оптимальные значения параметров управления.

2.2. Задача двусторонней оценки решения. Критерий — оценка температуры в заданной точке сверху (снизу):

$$T(x_0, t_F) \rightarrow \max(\min). \quad (11)$$

Функционал Лагранжа имеет вид

$$L = T(x_0, t_F) + \int_0^{t_F} \int_V w(x, t) \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta \Lambda - f(x, t) \right) dx dt,$$

его выражение, более удобное для вычисления вариации,

$$L = \int_0^{t_F} \int_V \left[w(x, t) \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta \Lambda - f(x, t) \right) + T(x, t) \delta(x - x_0, t - t_F) \right] dx dt.$$

Проделав преобразования, аналогично п. 2.1, из равенства нулю вариации функционала Лагранжа $\delta_T(L) = 0$ находим дифференциальное уравнение сопряженной задачи

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \rho(T) c_{\text{eff}}(T) + \lambda(T) \Delta w(x, t) - \delta(x - x_0, t - t_F) = 0, \quad (12)$$

которое решается при краевом и финальном условиях

$$w(x, t) = 0, \quad x \in S, \quad t > 0; \quad (13)$$

$$w(x, t_F) = 0, \quad x \in V. \quad (14)$$

Оптимальное управление находится из условия экстремума функционала Лагранжа: $L \rightarrow \max(\min)$ для всех $f(x, t)$ из множества (5), откуда $f_{\pm}(x, t) = f_0(x, t) \mp \varepsilon_f(x, t) \text{sign} w(x, t)$.

2.3. Задача двусторонней оценки производной решения. Критерий — оценка производной температуры в заданной точке сверху (снизу):

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t_F) \rightarrow \max(\min). \quad (15)$$

Функционал Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t_F) + \int_0^{t_F} \int_V w(x, t) \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta \Lambda - f(x, t) \right) dx dt,$$

его выражение, более удобное для расчета вариации,

$$L = \int_0^{t_F} \int_V \left[w(x, t) \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta \Lambda - f(x, t) \right) + \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \delta(x - x_0, t - t_F) \right] dx dt.$$

Проделав преобразования, аналогично п. 2.1, из равенства нулю вариации функционала Лагранжа $\delta_T(L) = 0$ получаем дифференциальное уравнение сопряженной задачи

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \rho(T) c_{\text{eff}}(T) + \lambda(T) \Delta w(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - x_0, t - t_F)] = 0, \quad (16)$$

которое решается при краевом и финальном условиях

$$w(x, t) = 0, \quad x \in S, \quad t > 0; \quad (17)$$

$$w(x, t_F) = 0, \quad x \in V. \quad (18)$$

Оптимальное управление, как и в п. 2.2, находится из условия экстремума функционала Лагранжа: $L \rightarrow \max(\min)$ для всех $f(x, t)$ из множества (5), откуда $f_{\pm}(x, t) = f_0(x, t) \mp \varepsilon_f(x, t) \operatorname{sign} w(x, t)$.

3. Конечно-разностный метод решения одномерной краевой задачи метода Лагранжа. Для решения задач оптимального управления, описанных уравнениями (1)–(18), был применен численный метод сквозного счета [7, 8], основанный на преобразовании многофазной задачи Стефана к «энтальпийному» виду с сосредоточенной теплоемкостью. Если область интегрирования бесконечная или характеристики среды имеют особенности, то целесообразно использовать неравномерную сетку. Дифференциальные соотношения системы (1)–(3) приближенно заменяются системой конечно-разностных уравнений

$$\frac{H_j^{p+1} - H_j^p}{\tau} = \frac{1}{\tilde{h}_{x,j}} \left(\frac{\Lambda_{j+1}^p - \Lambda_j^p}{h_{x,j+1}} - \frac{\Lambda_j^p - \Lambda_{j-1}^p}{h_{x,j}} \right) + f_j^p, \quad (19)$$

$$j = 1, \dots, n-1, \quad p = 0, 1, \dots,$$

где τ — шаг по времени; $t_p = p\tau$; p — номер временного слоя; $h_{x,j}$ — шаг сетки по координате x ; j — номер узла сетки пространственной координаты x ; $\tilde{h}_{x,j} = \frac{h_{x,j} + h_{x,j+1}}{2}$; T_j^p — сеточная функция; $T_j^p \approx T(x_j, t_p)$; $H_j^p = H(T_j^p)$; $\Lambda_j^p = \Lambda(T_j^p)$;

$$f_j^p = f_0(x_j, t_p) + \varepsilon_f(x_j, t_p) \operatorname{sign}(w(x_j, t_p) - 1),$$

$j = 0, \dots, n$, $p = 0, 1, \dots$; начальное условие: $T_j^0 = T_0$, $j = 0, \dots, n$. Краевые условия на границе тела: $T_0^p = T_{S0}^p$, $T_n^p = T_{Sn}^p$, $p = 1, 2, \dots$.

Дискретный аналог сопряженной краевой задачи (7)–(9):

$$\frac{w_j^{p+1} - w_j^p}{a_{\text{eff}}(T_j^p)\tau} = \frac{1}{\tilde{h}_{x,j}} \left(\frac{w_{j+1}^p - w_j^p}{h_{x,j+1}} - \frac{w_j^p - w_{j-1}^p}{h_{x,j}} \right) - g_j^p, \quad (20)$$

$$j = 1, \dots, n-1, \quad p = 0, 1, \dots,$$

здесь w_j^p — сеточная функция, $w_j^p \approx w(x_j, t_p)$, $j = 0, \dots, n$; $p = 0, 1, \dots$; $a_{\text{eff}} = \lambda(T_j^p) / (\rho(T_j^p) c_{\text{eff}}(T_j^p))$, $c_{\text{eff}}(T) = c(T) + r_f \delta(T - T_f)$, формулы для аппроксимации дельта-функции и ее производной

$$\delta(x) \approx \delta_{\sigma}(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad \sigma \approx 0, 1T_f,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - x_0, t - t_F)] = \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - x_0)] \delta(t - t_F),$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x}(x) \approx \frac{\partial \delta_{\sigma}}{\partial x}(x) = -\frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}.$$

Вычислим значения свободного члена для задачи п. 2.1:

$$g_j^{p_f-1} = \frac{w_1 \delta_h(x_j - x_0)}{\tau \lambda(T_j^{p_f})}, \quad g_j^p = 0, \quad p < p_f - 1,$$

где h — параметр разбиения области; в п. 2.1 $x_0 = x_{f2}(t_F)$ — координата правой границы фазового перехода в конечный момент времени.

Соответственно для задачи п. 2.2:

$$g_j^{p_f-1} = \frac{\delta_h(x_j - x_0)}{\tau \lambda(T_j^{p_f})}, \quad g_j^p = 0, \quad p < p_f - 1,$$

и для задачи п. 2.3:

$$g_j^{p_f-1} = \frac{-\frac{\partial \delta_h}{\partial x}(x_j - x_0)}{\tau \lambda(T_j^{p_f})}, \quad g_j^p = 0, \quad p < p_f - 1.$$

Аппроксимация финального и краевых условий (13), (14), (17), (18):

$$w_j^{p_f} = 0, \quad j = 0, \dots, n; \quad w_0^p = w_n^p = 0, \quad p = 0, 1, \dots$$

Итерационная процедура. Система нелинейных алгебраических уравнений метода конечных разностей (МКР) (19), (20) решается с учетом записанных начальных и краевых условий в соответствии с итерационной процедурой: на первом этапе задается начальное приближение к решению сопряженной задачи (7)–(9), решается прямая задача (1)–(3) и согласно (19) находятся приближенные сеточные значения температуры. На втором этапе при помощи соотношений (20) решается сопряженная задача (7)–(9) с учетом результатов, полученных на первом этапе вычислений, после чего снова решается прямая задача (1)–(3) с учетом результатов предыдущего этапа. Контроль погрешности осуществляется при помощи сравнения двух последующих итерационных приближений к значениям сеточных функций.

Эксперименты показывают, что с увеличением скачков кусочно-линейного управления в точках «переключений» и неоднородности теплофизических характеристик среды сходимость итерационного метода обычно ухудшается, при этом результаты вычислений на итерациях часто приобретают колеблющийся характер с очень медленной сходимостью. Применение метода релаксаций (с коэффициентом релаксации k_{rel} порядка 0.5) в несколько раз повышает скорость сходимости:

$$\hat{T}_j^p = (1 - k_{\text{rel}})T_j^p + k_{\text{rel}}T_j^{p-1}, \quad \hat{w}_j^p = (1 - k_{\text{rel}})w_j^p + k_{\text{rel}}w_j^{p-1},$$

$$j = 0, \dots, n, \quad p = 1, 2, \dots,$$

где \hat{T}_j^p и \hat{w}_j^p — улучшенные приближения.

Искомые значения параметра w_1 соответствуют условию $T(x_0, t_F) = T_f$. Экономичным является подход, в котором вначале задается значение w_1 и далее в процессе решения задачи оптимизации согласно (6) находится величина $x_0(w_1)$ (в простейшем варианте — номер ближайшего узла сетки $j_0(w_1)$).

Шаги интегрирования выбираются исходя из требований точности конечно-разностного решения. Схема интегрирования по времени явная. Как показал опыт моделирования, она предпочтительнее неявной: экономичнее, меньше нарушает симметрию задачи, что особенно важно по причине нелинейностей параметров. Контроль соотношения шагов по времени и по пространственной переменной осуществлялся при помощи известного условия устойчивости явных схем для уравнения теплопроводности.

Особенностью рассматриваемого варианта энтальпийного метода для решения прямой задачи (1)–(3) является то, что в нем не применяется сглаживание дельта-функции в формуле сосредоточенной теплоемкости (тем не менее при решении сопряженной задачи таковой метод используется как для свободного члена, так и в выражении для сосредоточенной теплоемкости). Трудности, связанные с учетом в МКР сосредоточенной теплоемкости, отмечены в аналитическом обзоре [7]. Аналогичные проблемы моделирования фазовых переходов в грунте изучаются в статье [6]. В работах [9–12] рассмотрены подходы к решению задачи Стефана, основанные на редукции краевой задачи к нелинейным интегральным уравнениям.

4. Результаты решения модельных задач.

4.1. Результаты решения первой задачи оптимизации. Исходные данные к расчету: размер области $L_x = 1$, количество шагов n сетки по пространственной переменной — порядка 50, конечное время $t_F = 1$, краевые условия и прочие параметры: $T(0, t) = 300$, $T(L_x, t) = 0$, $\tau = 10^{-4}$; $\rho = 1$, $c = 1$, $\lambda = 1$, $r_f = 300$, $T_f = 500$, $T_0 = 0$, $w_1 = -2$;

$$f_0(x, t) = 5000, \varepsilon_f(x, t) = 2000, f_-(x, t) = 5000 + 2000\text{sign}(w - 1).$$

Наибольшее значение координаты фронта плавления $x_f = 0.72$. Результаты итерационных вычислений представлены в табл. 1.

На рис. 1–3 представлены графики температурного поля, решения сопряженной задачи и их характеристик в зависимости от пространственной координаты (с шагом по времени 0.01–0.02) и времени.

Кружки на горизонтальной линии на рис. 1, а, б соответствуют последовательным положениям границ области плавления.

Таблица 1. Результаты итераций

Итерация	$j_0(w_1)$	u_{j_0}
1	27	499.99930
2	37	512.49176
3	36	500.00099
4	37	499.99908
5	36	500.00099

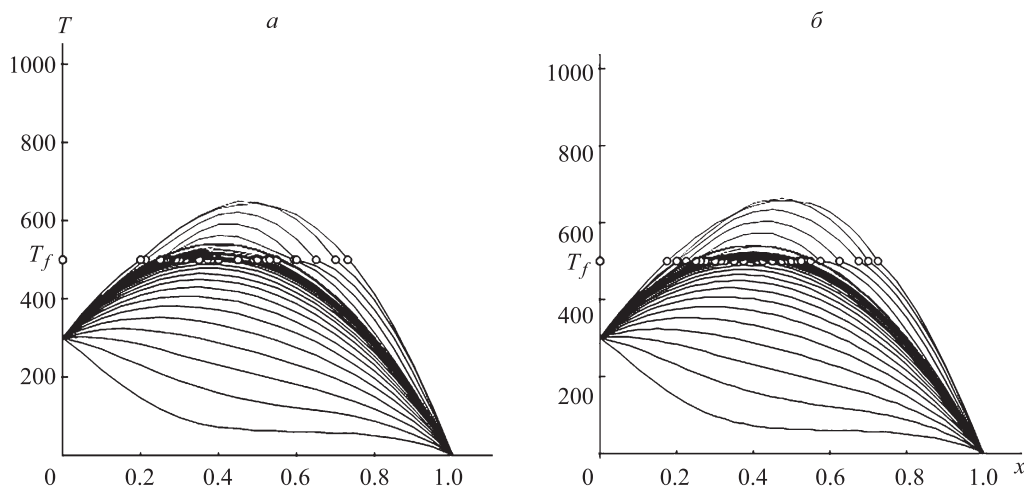


Рис. 1. Графики температурного поля после 5-й итерации ($w_1 = -2$, шаг по времени вывода графиков — 0.02)
а — $n = 20$; б — $n = 40$.

Конечные значения координат фронта плавления для данных рис. 1, а: $x_{f1} = 0.20$; $x_{f2} = 0.73$. Результаты итерационных вычислений представлены в табл. 2.

Таблица 2. Результаты итераций ($w_1 = -2, n = 40$)

Итерация	x_{f1}	x_{f2}	T_{\max}
1	0.25309	0.53822	529.55568
2	0.12857	0.7500	758.39480
3	0.2000	0.7250	637.37876
4	0.17624	0.7250	657.48097
5	0.17628	0.7250	657.43496

Горизонтальная линия на рис. 2 показывает значение ординаты $w = 1$, при которой происходит скачкообразное «переключение» управляющей функции $f_-(x, t)$.

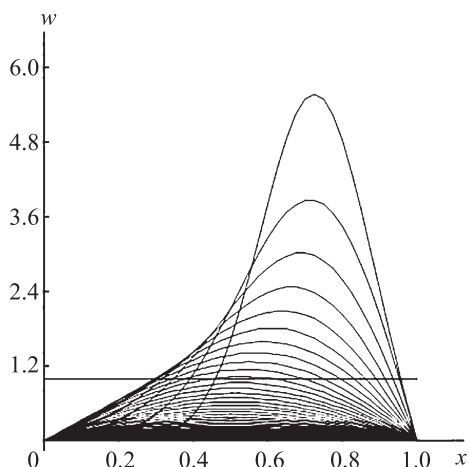


Рис. 2. Графики решения сопряженной задачи после 5-й итерации ($w_1 = -2, n = 40$, шаг по времени вывода графиков — 0.01)

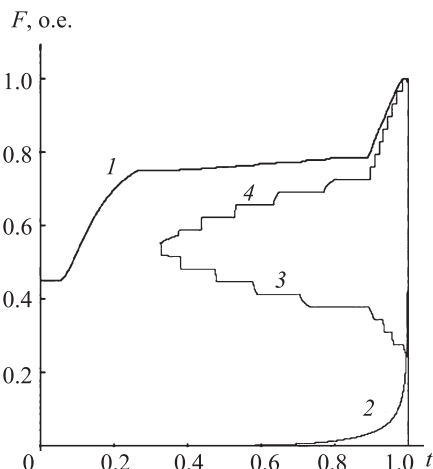


Рис. 3. Характеристики оптимального решения после 5-й итерации ($w_1 = -2, n = 40$)

1 — максимальные значения температуры; 2 — решения сопряженной задачи; 3, 4 — координаты левой (3) и правой (4) границ фронта плавления.

Контроль погрешности численного решения осуществлялся при помощи сравнения с аналитическим решением соответствующей стационарной задачи и по значениям теплового баланса (погрешность как для прямой, так и для сопряженной задачи около 3%).

4.2. Результаты решения второй задачи оптимизации. Исходные данные к расчету те же (количество шагов сетки по пространственной переменной $n = 40$, $f_{\pm}(x, t) = 5000 \mp 2000 \operatorname{sign}(w)$). Решение задачи оценивается сверху и снизу в середине интервала ($x_0 = 0.5$).

Результаты при нахождении максимума решения — конечные значения координат фронта плавления: $x_{f1} = 0.07$, $x_{f2} = 0.83$; приближенное значение после первой итерации: $T_+^{(1)} = 772.8$. Решение находится за две итерации, искомое значение $T_+ = 1024.9$.

Результаты при нахождении минимума решения — конечные значения координат фронта плавления: $x_{f1} = 0.27$, $x_{f2} = 0.53$; приближенное значение после первой итерации: $T_-^{(1)} = 772.8$. Решение находится за две итерации, искомое значение $T_- = 513.8$. Результаты решения соответствующих краевых задач представлены в графической форме на рис. 4 и 5.

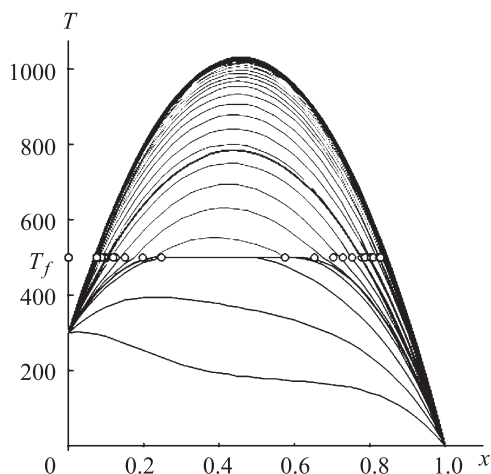


Рис. 4. Графики температурного поля после 5-й итерации при оценке решения сверху ($n = 40$, шаг по времени вывода графиков — 0.025)

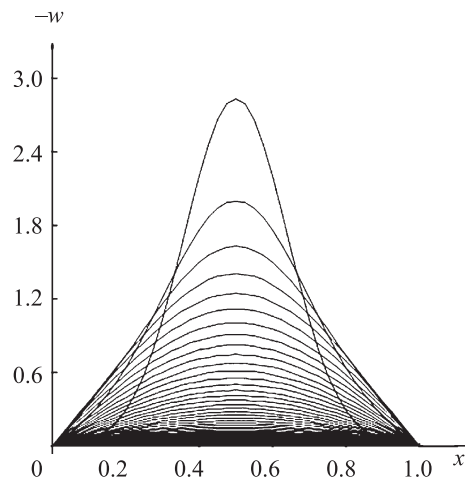


Рис. 5. Графики решения сопряженной задачи после 5-й итерации при оценке решения сверху ($n = 40$, шаг по времени вывода графиков — 0.025)

Поскольку функция $w(x, t)$, являющаяся решением сопряженной задачи, оказалась знакопостоянной, то для отыскания решения рассматриваемого варианта задачи оптимального управления оказалось достаточно всего двух итераций.

Данный подход может использоваться и как двусторонний метод решения начальных и краевых задач с учетом неустранимой погрешности [9].

4.3. Результаты решения третьей задачи оптимизации. Исходные данные к расчету те же (количество шагов сетки по пространственной переменной $n = 40$, $f_{\pm}(x, t) = 5000 \mp 2000\text{sign}(w)$). Производная решения задачи $\frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t_F)$ оценивается сверху и снизу в середине интервала ($x_0 = 0.5$). Результаты вычислений представлены в табл. 3 и на рис. 6, 7.

Таблица 3. Результаты итераций ($n = 40$)

Итерация	$\min \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t_F)$	$\max \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, t_F)$
1	-304.4	-304.4
2	-821.3	177.8
3	-790.5	171.8
4	-788.8	172.2
5	-788.8	172.2

Конечные значения координат фронта плавления: $x_{f1} = 0.14$, $x_{f2} = 0.80$ (при нахождении максимума производной) и $x_{f1} = 0.1$, $x_{f2} = 0.68$ (при нахождении минимума производной).

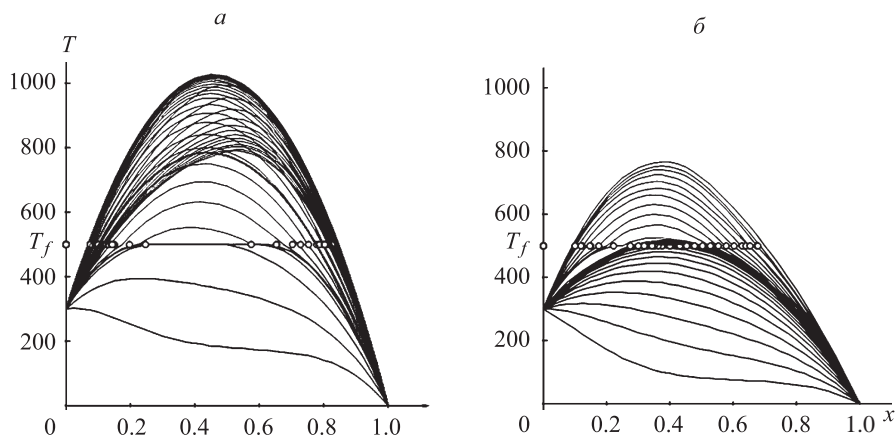


Рис. 6. Графики температурного поля после 5-й итерации при оценке производной решения сверху (а) и снизу (б) ($n = 40$, шаг по времени вывода графиков — 0.025)

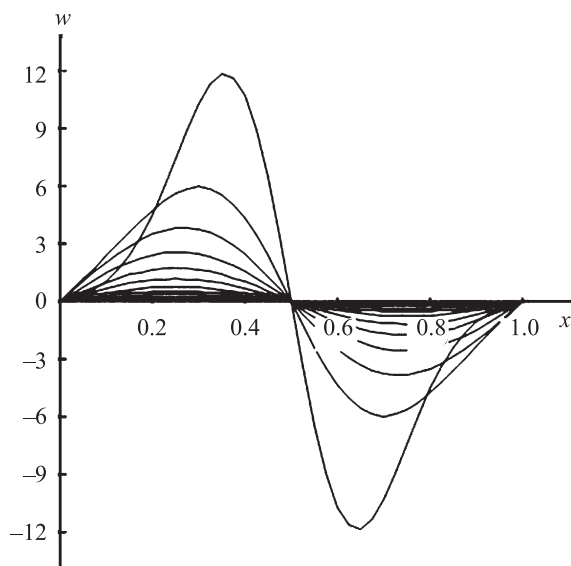


Рис. 7. Графики решения сопряженной задачи после 5-й итерации при оценке производной решения сверху ($n = 40$, шаг по времени вывода графиков — 0.025)

Заключение. Сформулирована задача оптимального управления температурным полем с учетом фазовых переходов и нелинейных свойств материала. Разработаны конечно-разностный метод и программы для ЭВМ, позволяющие эффективно осуществлять компьютерное моделирование и оптимизацию теплофизических процессов при плавлении и кристаллизации вещества.

Прямая задача Стефана решалась на основе одного из вариантов сквозного «энтальпийного» метода. Решение сопряженной задачи находилось при помощи сглажи-

вания сосредоточенной теплоемкости и прочих параметров и характеристик с особенностями типа дельта-функции и ее производных.

В качестве примеров рассмотрены три задачи оптимизации: по критерию минимума энергозатрат на плавление материала при соответствующих ограничениях, а также по критерию максимума (минимума) температурного поля и его производных в заданной точке области. Во всех случаях функцией управления являлась удельная мощность объемного источника, значения которой находятся в некоторой полосе произвольной ширины.

Результаты работы могут применяться при исследовании и проектировании в области металлургии, электрических аппаратов, криотехнике и т. д.

Литература

1. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. 824 с.
2. Zubov V. I. Общий метод множителей Лагранжа и оптимизация процессов в сплошных средах: дис. на соискание учен. степени д-ра физ.-матем. наук. М.: РАН, 2002. 250 с.
3. Албу А. Ф., Zubov V. I. Исследование задачи оптимального управления процессом кристаллизации вещества в новой постановке для объекта сложной геометрической формы // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 2014. Т. 54, № 12. С. 1879–1893.
4. Гукасов А. К., Гукасова Е. В. Численное решение задачи оптимального управления границей фазового перехода // Фундаментальные исследования. 2014. № 12–11. С. 2325–2329.
5. Кректулева Р. А., Батракин А. В. Совместное решение обратной задачи теплопроводности и задачи оптимального проектирования в технологии сварки неплавящимся электродом // Изв. Томск. политехн. ун-та. 2012. Т. 320, № 2. С. 104–109.
6. Мельникова Ю. С. Математическое моделирование управления нестационарным температурным полем в двухфазных средах // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 2. [Электрон. ресурс] URL: <http://technomag.edu.ru/doc/330390.html> (дата обращения: 12.02.2016).
7. Бучко Н. А. Энтальпийный метод численного решения задач теплопроводности в промерзающих или протаивающих грунтах // СПбГУНТИПТ. [Электрон. ресурс] URL: http://refportal.com/upload/files/entlpiiny_metod_chislennogo_resheniya.pdf (дата обращения: 12.02.2016).
8. Vasil'ev V. I., Maksimov A. M., Petrov E. E., Tsyarkin G. G. Mathematical model of the freezing-thawing of saline frozen soil // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1995. Vol. 36, issue 5. P. 689–696.
9. Некрасов С. А. Интервальные и двусторонние методы для расчета с гарантированной точностью электрических и магнитных систем: дис. на соискание учен. степени д-ра техн. наук. Новочеркасск: Южно-Рос. гос. политехн. ун-т, 2002. 310 с.
10. Некрасов С. А. Моделирование фазовых переходов первого рода методом интегральных уравнений в случае стационарного перемещающегося поверхностного источника // Инж.-физ. журн. 1994. Т. 66, № 6. С. 754–757.
11. Некрасов С. А. Задача Стефана. Ч. I // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 8. С. 1114–1121.
12. Некрасов С. А. Задача Стефана. Ч. II // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 9. С. 1254–1258.

References

1. Vasil'ev F. P. *Metody optimizacii* [Optimization methods]. Moscow, Publ. House "Faktorial Press", 2002, 824 p. (In Russian)
2. Zubov V. I. *Obshchij metod mnozhitel'ej Lagranzha i optimizacija processov v sploshnyh sredah* [The general method of Lagrange multipliers and optimization of processes in continuous media]. Doct. diss. Moscow, RAS, 2002, 250 p. (In Russian)
3. Albu A. F., Zubov V. I. Issledovanie zadachi optimal'nogo upravlenija processom kristallizacii veshhestva v novoj postanovke dlja ob'ekta slozhnoj geometricheskoj formy [Research objectives of optimum control the process of crystallization agent at the new formulation for object complex geometric shapes]. *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* [J. of Calcul. mathematics and mathem. physics], 2014, vol. 54, no. 12, pp. 1879–1893. (In Russian)
4. Gukasov A. K., Gukasova E. V. Chislennoe reshenie zadachi optimal'nogo upravlenija granicej fazovogo perehoda [The numerical solution of optimal control problem of the phase transition boundary]. *Fundamental'nye issledovaniya* [Basic Research], 2014, no. 12–11, pp. 2325–2329. (In Russian)

5. Krektuleva R. A., Batranin A. V. Sovmestnoe reshenie obratnoj zadachi teploprovodnosti i zadachi optimal'nogo proektirovanija v tehnologii svarki neplavjashhimsja jelektrodom [The joint solution inverse problem of heat conduction and the problem of optimal design at technology of welding with non-consumable electrode]. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta* [Bulletin of the Tomsk Polytechnic University], 2012, vol. 320, no. 2, pp. 104–109. (In Russian)
6. Mel'nikova Ju. S. Matematicheskoe modelirovanie upravlenija nestacionarnym temperaturnym polem v dvuhfaznyh sredah [Mathematical modeling of time-dependent temperature field in two-phase media]. *Nauka i obrazovanie* [Science and education], 2012, no. 2. The electronic edition. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/330390.html> (accessed: 12.02.2016) (In Russian)
7. Buchko N. A. Jental'pijnij metod chislennogo reshenija zadach teploprovodnosti v promerzajushhij ili protaivajushhij gruntah [Enthalpy method of numerical solutions problems of heat conduction at freeze or thawing of soil]. *SPbGUNT i PT*. Available at: http://refportal.com/upload/files/entalpiiny_metod_chislennogo_resheniya.pdf (accessed: 12.02.2016) (In Russian)
8. Vasil'ev V. I., Maksimov A. M., Petrov E. E., Tsyppin G. G. Mathematical model of the freezing-thawing of saline frozen soil. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1995, vol. 36, issue 5, pp. 689–696.
9. Nekrasov S. A. *Interval'nye i dvustoronnie metody dlja rascheta s garantirovannoj tochnost'ju jelektricheskij i magnitnyh sistem* [Interval and bilateral methods of calculation with guaranteed accuracy of electric and magnetic systems]. Doct. dis. Novocherkassk, South-Russian State Politechnical University, 2002, 310 p. (In Russian)
10. Nekrasov S. A. Modelirovanie fazovyh perehodov pervogo roda metodom integral'nyh uravnenij v sluchae stacionarnogo peremeshhajushhegosja poverhnostnogo istochnika [Modeling of phase transitions of the first kind by the method of integral equations in the case of a stationary moving surface source]. *Inzh.-fiz. zhurn.* [Engineering and Physical Journal], 1994, vol. 66, no. 6, pp. 754–757. (In Russian)
11. Nekrasov S. A. Zadacha Stefana [Stefan problem]. Pt I. *Differencial'nye uravnenija* [Differential Equations], 1996, vol. 32, no. 8, pp. 1114–1121. (In Russian)
12. Nekrasov S. A. Zadacha Stefana [Stefan problem]. Pt II. *Differencial'nye uravnenija* [Differential Equations], 1996, vol. 32, no. 9, pp. 1254–1258. (in Russian)

Статья рекомендована к печати доц. А. П. Жабко.

Статья поступила в редакцию 14 октября 2015 г.

Статья принята к печати 25 февраля 2016 г.